www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

INSTITUT SUPERIEUR DU COMMERCE Session de 1989

MATHÉMATIQUES Option Générale Durée : 4 heures - Coefficient : 4

EXERCICE 1 (4 points)

• Les matrices considérées dans cet exercice sont toutes des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels (c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$). Si $(s_{11}(n))$, $(s_{12}(n))$, $(s_{21}(n))$, $(s_{22}(n))$ sont quatre suites convergentes de limites respectives, s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}, on convient d'écrire :

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} s_{11}(n) & s_{12}(n) \\ s_{21}(n) & s_{22}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$$

• Pour A matrice carrée d'ordre deux et $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$
où A^k désigne la $k^{ème}$ puissance de la matrice A.

1°) Calculer S_n dans chacun des cas suivants : i) $A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

iii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ iv) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et, à chaque fois, déterminer $\lim_{n\to\infty} S_n$

2°) i) Plus généralement, soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et M un nombre réel tel que : $\forall i,j \in [\![1, 2]\!]$, $|a_{ij}| \leq M$. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, chaque terme de A^n est majoré en valeur absolue par $2^{n-1}.M^n$; en déduire que la suite (S_n) associée à la matrice A est convergente. La limite de la suite (S_n) est alors notée e^A.

ii) A-t-on toujours $e^{A+B} = e^A e^B$, pour A, B $\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

EXERCICE 2 (6 points)

On lance indéfiniment une pièce truquée amenant pile avec la probabilité p (avec $p \in]0, 1[$) et donc face avec la probabilité q ($q = 1 - p$), et on s'intéresse à la longueur des **séries** successives de « pile » ou de « face », en appelant **série** une succession de « pile » ou une succession de « face » interrompue par l'événement contraire.

[par exemple si l'on obtient PPPPFFFPPF... ou FFPFFP..., ou dit dans le premier cas que la 1ère série est de longueur 4 (c'est une série de « pile »), la seconde de longueur 3 (c'est donc une série de « face »), la troisième de longueur 2,... tandis que dans le second cas la 1ère série est de longueur 2 (c'est une série de « face »), la deuxième de longueur 1, la troisième de longueur 2,...]

On note X_i la longueur aléatoire de la $i^{ème}$ série.

1°) Pour $x \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, rappeler les valeurs des expressions suivantes : $\sum_{k=0}^{n} x^k$, $\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}$, $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)x^{k-2}$
ainsi que leurs limites lorsque n tend vers l'infini.

2°) Déterminer la loi de X_1. Vérifier que l'on a bien $\sum_{k=1}^{\infty} P(X_1 = k) = 1$, et déterminer l'espérance et la variance de X_1.

3°) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2), en déduire la loi marginale de X_2. Vérifier que l'on a bien $\sum_{k=1}^{\infty} P(X_2 = k) = 1$ et déterminer l'espérance de X_2.

4°) Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

5°) Quelle est la loi de X_3 ? celle de X_4 ? Peut-on généraliser ?

TSVP

PROBLEME (10 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = e^{-x^2}$

1°) i) Dire pourquoi f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

ii) Etudier les variations de f et tracer la courbe (C)représentative de f en repère orthonormé. On précisera en particulier les éventuels points d'inflexion et on tracera sur le même dessin les tangentes en ces points.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$H_n(x) = e^{x^2} . f^{(n)}(x)$

ou $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{ème}$ de la fonction f. (on rappelle que, par convention, on a : $f^{(0)} = f$).

2°) i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$H_{n+1}(x) = H'_n(x) - 2x H_n(x) \quad (\text{où } H'_n \text{ est la dérivée de } H_n).$$

En déduire que H_n est une fonction polynomiale, préciser son degré ainsi que le coefficient du terme de plus haut degré.

ii) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

α) $H_{n+1}(x) + 2x H_n(x) + 2n H_{n-1}(x) = 0$

β) $H'_n(x) = -2n H_{n-1}(x)$

γ) $H''_n(x) - 2x H'_n(x) + 2n H_n(x) = 0$

iii) Déterminer les polynomes H_0, H_1, H_2, H_3, H_4, ainsi que les racines de ces polynomes.

iv) Vérifier que la fonction H_n est paire pour n pair et impaire pour n impair.

3°) On rappelle que l'on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ (on ne demande pas de démontrer ce résultat).

i) Montrer que pour toute fonction polynome P, l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) e^{-x^2} dx \text{ existe}$$

ii) Pour $n, p \in \mathbb{N}$, on pose : $I_{n,p} = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_p(x) e^{-x^2} dx$

α) A l'aide d'intégrations par parties soigneusement justifiées, montrer que l'on a :

$$\forall n, p \in \mathbb{N},\ n < p \Rightarrow I_{n,p} = 0.$$

β) En déduire, pour k = 1, 2, 3, la valeur de : $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} e^{-x^2} dx$

γ) Calculer enfin : $I_{1,1}$, $I_{2,2}$, $I_{3,3}$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail